

Vibrations de l'ingénieur et applications

Bernard CASTAGNÈDE

Table des matières

I. Rappels de cours

1- Introduction générale	11
1.1- Introduction	11
1.2- Introduction sur les vibrations dans les systèmes discrets	14
1.3- Introduction sur les vibrations dans les systèmes continus	16
1.4- Introduction sur l'analyse modale	21
2- Vibrations des systèmes discrets	23
2.1- Oscillations libres d'un système à un degré de liberté	23
2.2- Notion de stabilité pour un système à un degré de liberté	28
2.3- Oscillations forcées d'un système à un degré de liberté	28
2.4- Excitation par la base ou par un balourd en rotation	35
2.5- Réponse à une excitation quelconque, transformée de Laplace	37
2.6- Formalisme de Lagrange pour l'étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté	39
2.7- Oscillations libres d'un système à plusieurs degrés de liberté	40
2.8- Relations d'orthogonalité, notions de modes propres	43
2.9- Exemple d'utilisation des coordonnées normales	46
2.10- Utilisation de la transformée de Laplace pour un système amorti	53
3- Vibrations des systèmes continus	61
3.1- Vibrations des cordes	61
3.2- Vibrations longitudinales des barres	66
3.3- Vibrations transversales des barres minces	73
3.4- Vibrations des membranes	85
3.5- Vibrations des plaques minces	97
3.6- Méthodes énergétiques – Critère de Rayleigh	111
3.7- Méthode de Ritz pour les vibrations des systèmes continus	116
3.8- Introduction à la méthode des éléments finis en vibrations	120

4- Éléments d'analyse modale	119
4.1- Introduction	119
4.2- Bases de l'analyse modale	121
4.3- Analyse modale expérimentale	123
4.4- Divers exemples significatifs relatifs à l'analyse modale	127

II. Exercices avec éléments de correction

5- Vibrations dans les systèmes discrets – Solutions élémentaires	128
---	-----

Exercice 1 : Réponse libre d'un oscillateur à deux degrés de libertés (A)

Exercice 2 :

Exercice 3 :

Exercice 4 :

Exercice 5 :

Exercice 6 :

Exercice 7 :

Exercice 8 :

Exercice 9 :

Exercice 10 :

Exercice 11 :

Exercice 12 :

Exercice 13 :

Exercice 14 :

6- Vibrations dans les systèmes discrets – Etude d'autres cas	
---	--

Exercice 15 :

Exercice 16 :

Exercice 17 :

Exercice 18 :

Exercice 19 :

Exercice 20 :

Exercice 21 :

Exercice 22 :

Exercice 23 :

Exercice 24 :

7- Vibrations mécaniques dans les systèmes continus – Cordes, poutres

Exercice 25 : Réponse vibratoire d'une corde pincée à l'une de ses extrémités (A)

Exercice 26 : Réponse vibratoire d'une corde pincée en ses deux extrémités (A)

Exercice 27 : Réponse vibratoire d'une corde pincée au quart de sa longueur (A)

Exercice 28 : Étude des terminaisons d'une corde de type masse ou raideur (B)

Exercice 29 : Propagation d'ondes transversales dans une corde élastique composite (B)

Exercice 30 : Modélisation par discrétisation des vibrations d'une corde (C)

Exercice 31 : Vibrations longitudinales d'un cylindre comprimé bi-encasté (B)

Exercice 32 : Vibrations longitudinales d'un cylindre comprimé « encasté – libre » (B)

Exercice 33 : Vibrations longitudinales d'un cylindre comprimé « libre – libre » (B)

Exercice 34 : Vibrations longitudinales d'une poutre attachée à une masse (B)

Exercice 35 : Vibrations longitudinales d'une poutre composite (C)

Exercice 36 : Vibrations longitudinales d'une poutre composite - suite (C)

Exercice 37 : Étude vibratoire d'une poutre en flexion « encastée – appuyée » (B)

Exercice 38 : Étude vibratoire d'une poutre en flexion « encastée – guidée » (B)

Exercice 39 : Étude vibratoire d'une poutre en flexion « encastée – libre » (B)

8- Vibrations mécaniques dans les systèmes continus – Membranes, plaques

Exercice 40 :

Exercice 41 : Étude des modes propres d'une membrane rectangulaire (B)

Exercice 42 : Vibrations transversales d'une membrane rectangulaire (B)

Exercice 43 : Vibrations transversales d'une membrane rectangulaire – suite (B)

Exercice 44 : Vibrations transversales d'une plaque rectangulaire (B)

Exercice 45 : Vibrations transversales d'une plaque rectangulaire – suite (B)

Exercice 46 :

Exercice 47 :

Exercice 48 :

9- Vibrations mécaniques dans les systèmes continus – Méthodes approchées	
Exercice 49 : Méthode de Rayleigh pour une corde vibrante (A)	166
Exercice 50 : Méthode de Rayleigh pour une corde vibrante - suite (A)	167
Exercice 51 : Méthode de Rayleigh pour une poutre bi-appuyée en flexion (B)	168
Exercice 52 : Méthode de Rayleigh pour une poutre bi-appuyée en flexion – suite (A)	170
Exercice 53 : Méthode de Rayleigh pour une poutre bi-encastée en flexion (A)	170
Exercice 54 : Méthode de Rayleigh pour une poutre bi-encastée en flexion – suite (A)	172
Exercice 55 : Méthode de Rayleigh pour une membrane carrée (A)	172
Exercice 56 : Méthode de Rayleigh pour une membrane rectangulaire (A)	174
Exercice 57 : Méthode de Rayleigh pour une membrane circulaire (A)	175
Exercice 58 : Méthode de Rayleigh pour une plaque carrée (A)	176
Exercice 59 : Méthode de Ritz pour une corde vibrante tendue (B)	177
Exercice 60 : Méthode de Ritz pour une poutre « encastée – libre » en mouvement longitudinal (A)	179
Exercice 61 : Méthode de Ritz pour une poutre « encastée – attachée » en mouvement longitudinal (B)	180
Exercice 62 : Méthode de Ritz pour une poutre « appuyée – appuyée » en mouvement de flexion (A)	182
Exercice 63 : Méthode de Ritz pour une poutre « encastée – libre » en mouvement de flexion (A)	182
Exercice 64 : Méthode de Ritz pour une membrane circulaire (B)	184
Exercice 65 : Poutre en mouvement longitudinal modélisée avec deux éléments finis (A)	186
Exercice 66 : Équations du mouvement d'une poutre avec trois éléments finis (A)	
Exercice 67 : Poutre en flexion bi-appuyée avec un seul élément fini (A)	
Exercice 68 : Poutre en flexion « encastée – libre » avec un seul élément fini (A)	
Exercice 69 : Poutre en flexion bi-encastée avec deux éléments finis (A)	
Exercice 70 : Poutre en flexion bi-encastée avec trois éléments finis (B)	

III. Éléments annexes

Tables de transformées de Laplace usuelles	245
Bibliographie	259
Index	261

Avant-propos

Le domaine des vibrations mécaniques est très important pour de nombreux problèmes et diverses configurations en sciences de l'ingénieur, notamment pour l'absorption et l'isolation vibratoires. La modélisation des systèmes discrets à un, puis à plusieurs degrés de liberté, s'effectue habituellement en Licence dans les cursus de sciences appliquées. Cet apprentissage est progressif, permettant d'illustrer les notions de modes propres, d'orthogonalité et de couplages entre modes. L'étude des oscillations forcées des systèmes, ou bien celle de la réponse vibratoire à une excitation quelconque permettent de comprendre que tout est déjà quelque part contenu dans la réponse libre des systèmes, tout du moins pour leur comportement linéaire. L'extension aux vibrations des systèmes continus a occupé pendant au moins deux siècles les esprits scientifiques les plus brillants, à la fois mathématiciens et physiciens, essentiellement en Europe, entre les années 1750 et 1950. Tour à tour, les savants de ces époques ont étudié les vibrations des cordes, des membranes, des poutres, des plaques et des coques, autorisant l'étude de problèmes et de configurations diversifiées de plus en plus complexes. Pour chacun de ces cas, des méthodes mathématiques originales ont été proposées. Citons la méthode de séparation des variables, la décomposition en modes propres (par exemple séries de Fourier pour le calcul des modes propres de vibrations de cordes), des techniques de minimisation de fonctionnelles pour la méthode de Rayleigh – Ritz, etc. A partir des années 1950 d'ailleurs, suite au travail pionnier de Ritz, la porte était ouverte justement pour discrétiser les problèmes de vibrations des milieux continus (a priori constitués d'un nombre infini de degrés de liberté), ce qui permit ensuite rapidement l'avènement la méthode des éléments finis. Bien entendu, ces éléments sont déjà beaucoup plus difficiles d'accès, et sont traités plutôt en Master. Cela constitue d'ailleurs des modules d'enseignement spécifiques sur les vibrations des coques (cylindriques ou sphériques), des couplages vibro-acoustiques, et des méthodes numériques spéciales (incluant les éléments finis) pour étudier ces problèmes.

L'objectif est ici davantage modeste. Le sujet est limité aux questions fondamentales qui sont traitées au niveau Licence, voire en début de Master, dans les cursus de sciences appliquées (physique, mécanique, sciences pour l'ingénieur). L'ouvrage traite à la fois les vibrations des systèmes discrets, et celles des systèmes continus, en excluant les questions relevant du Master 2 ou bien des Masters très spécialisés sur le domaine, telles que les vibrations des coques cylindriques, l'opérateur de O'Donnell – Mushtari, etc. Nous reprenons la formule qui a été utilisée dans un ouvrage précédent : « Thermique de l'ingénieur et applications », Éditions Ellipses (2018), à savoir, rappels de cours succincts, suivis de très nombreux exercices, de difficulté croissante.

Nous avons cherché à aborder ces questions avec un œil nouveau, en faisant référence le plus souvent aux textes majeurs sur le sujet, incluant le magistral ouvrage de deux volumes de Lord Rayleigh « Theory of sound », ainsi que le texte exhaustif sur le sujet de Stephen Timoshenko « Engineering vibrations ». Lorsque cela était possible, nous avons essayé d'aborder des questions un peu exotiques, telles que : la notion de dégénérescence des modes, des aspects simples liés aux oscillateurs non linéaires, aux solitons, etc.

En bref, ce modeste ouvrage a l'objectif d'introduire les étudiants à ce champ passionnant que sont les vibrations mécaniques dans les systèmes, offrant diverses applications et de très nombreuses pistes de réflexion, à la fois dans les cursus de physique appliquée, de mécanique et de ceux en sciences de l'ingénieur. L'ouvrage est structuré en 4 parties principales. L'essentiel du travail présente plus de soixante dix exercices et problèmes (soit pour près des deux tiers de l'ouvrage), dont une bonne moitié sont issus de l'expérience de presque 30 années d'enseignement dans ce domaine de la part des auteurs. Avant chaque partie principale, nous effectuons de plus des rappels de cours (à hauteur du plus du tiers du texte), en nous limitant aux éléments essentiels, sachant que les exercices le plus souvent les reprennent et les approfondissent. Les exercices eux-mêmes sont calibrés avec trois niveaux de difficulté ou de longueur croissante. Les exercices de la catégorie (A) correspondent à des applications directes du cours, et en général ils sont brefs. Ceux du niveau (B) sont déjà plus consistants, correspondant à des configurations spécifiques ou bien à des développements prenant plus de temps pour les traiter. Enfin, la catégorie (C) est relative à de véritables petits problèmes, nécessitant davantage d'efforts pour les résoudre complètement.

Nous espérons que les lecteurs trouveront stimulant ce petit ouvrage. Nous remercions au passage les nombreuses générations d'étudiants de la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université du Maine qui depuis plus de 25 ans nous ont servi de « cobayes » pour ces exercices.

Nous remercions aussi tous les collègues qui nous ont encouragé dans cette entreprise, à la lisière de nos spécialités de départ (acoustique, mécanique, physique des matériaux) sur un domaine situé à l'interface de plusieurs spécialités de base (mathématiques appliquées, mécanique, élasticité, sciences des vibrations). Nous remercions notamment l'ensemble des collègues du département de physique, mécanique & acoustique de l'UFR Sciences et Techniques à Le Mans Université, pour leurs encouragements et leur soutien constant au cours de la rédaction de cet ouvrage.

I. Rappels de cours

Chapitre 1- Introduction générale

I. Introduction

Le mouvement des systèmes mécaniques est habituellement étudié dans le diagramme de phase qui enregistre par exemple la vitesse $v(t)$ d'une particule en fonction de sa position $x(t)$. En général, on se limite à étudier la position $x(t)$ en fonction du temps t , cf. Figure 1.1a, pour le cas d'un mouvement sinusoïdal parfait, du type : $x(t) = A \cos \omega_0 t$, où A représente un terme d'amplitude arbitraire, et où ω_0 est la pulsation, quantité reliée à la fréquence par sa définition $\omega_0 = 2\pi f$, où f représente la fréquence des oscillations. Dès lors, il est possible d'obtenir la vitesse de la particule, par simple dérivation temporelle, en écrivant : $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin \omega_0 t$. Il est

alors possible par simple élévation au carré des deux expressions et de d'obtenir ainsi la relation suivante : $\omega_0^2 x^2(t) + v^2(t) = A^2 \omega_0^2$. Cette équation n'est rien d'autre que celle d'un cercle, centré en $(0,0)$ et de rayon relié au terme d'amplitude A . C'est justement le tracé de la Figure 1.1b, qui fournit ce résultat. Au passage, le terme d'amplitude sur la Figure 1.1a est visiblement : $A = 1$, si bien que le rayon du cercle sur la Figure 1.1b est manifestement égal à 1, lui aussi. Le mouvement oscillatoire qui est ainsi documenté correspond au cas élémentaire un système à un degré de liberté (il n'y a qu'une seule fonction à étudier, ici notée $x(t)$).

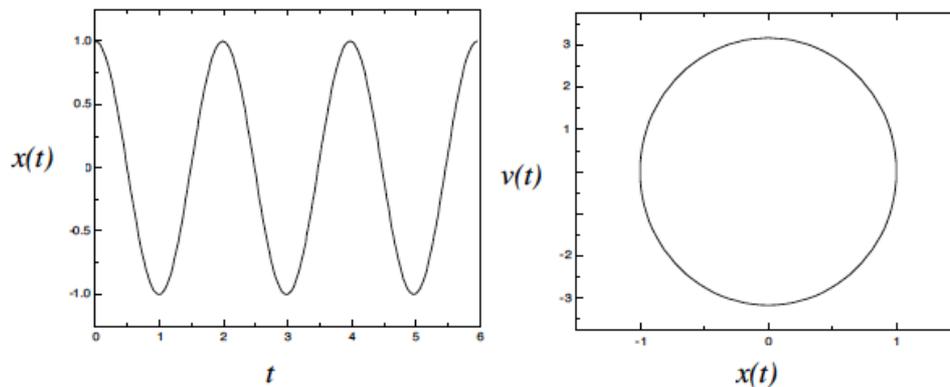


Figure 1.1 : Variation de la position d'une particule en mouvement oscillatoire
(a) en fonction du temps ; (b) en fonction de sa vitesse.

C'est par exemple le mouvement d'oscillations d'une masse ponctuelle accrochée à un ressort de compression – traction. La masse va osciller sans s'arrêter, mais uniquement dans le cas où les pertes dissipatives (par frottement, par exemple) sont négligeables. De fait, il y a toujours des frottements, celui de la masse oscillante avec l'air qui l'entoure par exemple, et dans ce cas, il n'est plus possible de noter la trajectoire $x(t)$ en fonction du temps t , comme sur la figure 1.1a, à l'aide d'une simple fonction cosinus, sous la forme : $x(t) = A \cos \omega_0 t$. À la place, il faut alors pour prendre en compte la diminution de l'amplitude du déplacement de la masse au cours des oscillations, prendre plutôt une autre équation, par exemple avec une fonction exponentielle décroissante (avec un argument négatif), par exemple sous la forme : $x(t) = A \exp(-\alpha t) \cos \omega_0 t$. Bien entendu, il faudra certainement relier la valeur de ce nouveau paramètre α , à la pulsation ω_0 . Pour autant, la trajectoire $x(t)$ en fonction du temps t , n'est plus une sinusoïde parfaite, du fait que l'amplitude effective $A \exp(-\alpha t)$, diminue au cours du temps. C'est justement ce qui est tracé sur la Figure 1.2a.

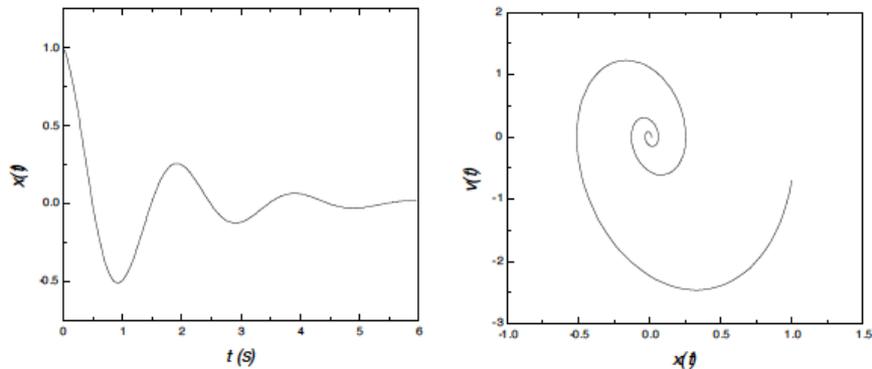


Figure 1.2 : Variation de la position d'une particule en mouvement oscillatoire, en présence d'amortissement : (a) en fonction du temps ; (b) en fonction de sa vitesse.

Nous observons toujours dans ce cas des oscillations, mais qui sont atténuées au cours du temps. Le tracé dans le diagramme des phases n'est plus un cercle parfait. À la place, on obtient une spirale logarithmique, ce qui est logique ici, puisque l'équation pour la vitesse devient :

$$v(t) = -A\omega_0 \exp(-\alpha t) \sin \omega_0 t - A\alpha \exp(-\alpha t) \cos \omega_0 t = -A \exp(-\alpha t) [\omega_0 \sin \omega_0 t + \alpha \cos \omega_0 t].$$

Dès lors, l'expression de départ pour le cas du cercle (sans amortissement devient ici) :

$\omega_0^2 x^2(t) + v^2(t) = A^2 \omega_0^2 \exp(-2\alpha t)$, résultat qui est bien différent et qui correspond effectivement à une spirale logarithmique.

Pour en revenir au cas élémentaire d'un oscillateur harmonique à un degré de liberté, par exemple une masse ponctuelle m attachée à un ressort de constante de raideur k , lorsque il n'y a pas de pertes (et donc pas d'amortissement), la deuxième loi de Newton s'écrit de manière triviale en absence de force extérieure : $m\ddot{x} + kx = 0$, soit en notant $k/m = \omega_0^2$, l'équation du mouvement se met sous la forme davantage compacte : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, relation qui indique justement que l'accélération de la masse m ,

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t), \quad (1.1)$$

Cette relation, particulièrement triviale ici, indique simplement que l'accélération (et donc en la multipliant par la masse, en retrouvant la force exercée sur la particule) est directement proportionnelle au déplacement de la masse. Ce résultat est inhérent à la solution oscillatoire proposée, puisque :

$$x(t) = A \cos \omega_0 t \Rightarrow \ddot{x}(t) = -A \omega_0^2 \cos \omega_0 t = -\omega_0^2 x(t), \quad (1.2)$$

Dit en d'autres termes, le fait de considérer une solution harmonique (avec une fonction cosinus ou bien sinus) pour le déplacement élémentaire de la masse, implique tout de suite que l'accélération (et donc indirectement la force exercée sur cette masse) est opposée au déplacement lui-même (à cause du signe moins) et proportionnelle au carré de la pulsation de résonance (le terme $\omega_0^2 = k/m$). A contrario, et du fait que globalement la force exercée sur la masse est elle-même une grandeur finie, lorsque plusieurs modes de vibrations seront possibles (cf. section suivante sur les systèmes à plusieurs degrés de liberté), chacun avec une pulsation propre différente, alors ce seront les modes de plus basse fréquence qui auront les déplacements modaux les plus importants, les modes en haute fréquence admettant des amplitudes modales de plus en plus faibles lorsque l'ordre du mode augmente.

II. Introduction sur les vibrations dans les systèmes discrets

Bien évidemment, l'étude des mouvements oscillatoires ne se limite pas à celle d'un simple oscillateur harmonique, décrit par une équation du type : $x(t) = A \cos \omega t$. De nombreux systèmes mécaniques sont plus compliqués par nature. Considérons ici un système élémentaire à deux degrés de liberté, constitué d'un pendule simple attaché à un petit chariot, lui-même en translation sur un plan horizontal dans la direction Ox , cf. Figure 1.3. Le chariot possède une masse M , alors que celle du pendule simple est m . La tige rigide (en fait un simple fil suffit) reliant la masse m au chariot est supposée de masse négligeable. Il y a donc pour un tel système, clairement deux types de mouvement, à savoir :

- Le mouvement de translation du chariot, repéré par la coordonnée $x_O(t)$.
- Le mouvement de rotation de la masse m , repérée sur la Figure 1.3, par la coordonnée angulaire $\theta(t)$.

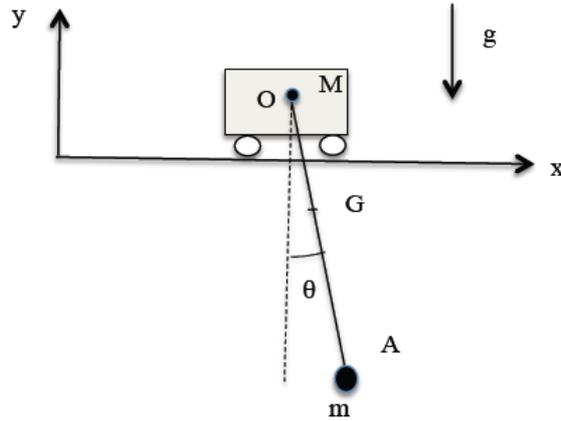


Figure 1.3 : Système couplé entre un pendule simple et un chariot en translation.

D'autres choix de coordonnées pour décrire le mouvement couplé des deux masses auraient pu être choisis, par exemple en les repérant dans leur mouvement horizontal, c'est-à-dire le long de l'axe Ox , en notant les deux coordonnées : $x_O(t)$ et $x_A(t)$, ou bien en se focalisant uniquement sur le mouvement du point A , en considérant les deux coordonnées : $x_A(t)$ et $\theta(t)$. En fait, il est possible de décrire le mouvement avec l'une ou l'autre de ces 3 possibilités, mais les conclusions sont identiques. Il faut clairement deux coordonnées différentes pour décrire un tel système comprenant deux masses ayant des mouvements distincts. On dira qu'un tel système possède deux degrés de liberté. Sans vouloir ici mettre en équation un tel système (de tels calculs seront proposés dans les exercices), il faut noter le résultat à partir des coordonnées $x_0(t)$ et $\theta(t)$. On obtient au final :

$$(M + m)\ddot{x}_0 + m\ell\ddot{\theta} = 0 \quad ; \quad \ell\ddot{\theta} + \ddot{x}_0 = g\theta . \quad (1.3)$$

Ce système très simple de deux équations peut être aussi écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} (M + m) & m\ell \\ 1 & \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (1.4)$$

Sous cette forme, une singularité apparaît clairement dans la matrice structurale « potentielle, ou de raideur », avec trois zéros présents, et le couplage gyroscopique est bien mis en valeur dans la matrice structurale « intertielle, ou de masse », avec les termes non diagonaux qui y sont présents. La généralisation de cette notation matricielle à d'autres systèmes permet d'écrire les équations du mouvement de manière davantage compacte, sous la forme :

$$[M_{ij}]\{\ddot{q}_j\} + [K_{ij}]\{q_j\} = \{0\} . \quad (1.5)$$

Dans cette représentation, on retrouve les matrices structurales d'inertie $[M_{ij}]$ et de raideur $[K_{ij}]$. Elles sont carrées, les indices i et j allant de 1 à n , où n représente le nombre de degrés de liberté (c'est-à-dire le nombre de coordonnées généralisées au sens de Lagrange, c'est-à-dire les coordonnées indépendantes, nécessaires pour mettre le système complètement en équations, ici notées par le vecteur colonne $\{q_j\}$).

Le système d'équations (1.5) représente un système homogène de n équations (ici du fait de l'absence de second membre). Ces n équations sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire qu'elles sont combinaisons linéaires les unes des autres (elles sont reliées entre elles). Si l'on considère des solutions harmoniques du type : $q_j = A_j \cos \omega_j t$, avec autant de modes « propres » que de degrés de liberté, alors on peut en déduire : $q_j = A_j \cos \omega_j t \Rightarrow \ddot{q}_j = -A_j \omega_j^2 \cos \omega_j t = -\omega_j^2 q_j$.

Le système d'équations (1.5) peut alors être réécrit sous la forme :

$$[K_{ij} - M_{ij}\omega^2]\{q_j\} = \{0\}. \quad (1.6)$$

En écrivant sous cette forme le système homogène de n équations, il faut impérativement pour en assurer la dépendance linéaire que le déterminant $n \times n$ de la matrice soit nul, ce qui s'écrit finalement sous la forme classique :

$$\det[K_{ij} - M_{ij}\omega^2]. \quad (1.7)$$

Dans cette écriture, il apparaît que les n pulsations propres, sont simplement les valeurs propres de l'opérateur $K_{ij} - M_{ij}\omega^2$, alors que le vecteur colonne $\{q_j\}$, solution pour un mode propre donné, représente le vecteur propre associé.

En absence d'amortissement et en régime libre (sans force extérieure appliquée sur l'un ou l'autre des degrés de liberté), tout se passe donc pour l'étude du système des n équations couplées (1.6), comme la résolution d'un problème de diagonalisation de l'opérateur $K_{ij} - M_{ij}\omega^2$, au sens de l'algèbre linéaire, pour le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres associés. Il sera notamment possible d'utiliser le théorème d'orthogonalité entre les divers vecteurs propres, c'est-à-dire : $\{q_i\} \cdot \{q_j\}^T = 0$ si $i \neq j$, et $\{q_i\} \cdot \{q_j\}^T \neq 0$ si $i = j$. Par ailleurs, dans certains cas, il sera utile d'utiliser la technique de normalisation des amplitudes modales, en travaillant non plus avec les coordonnées principales, mais à la place après normalisation, d'introduire les coordonnées dites « normales ». Des exemples seront proposés aussi dans les exercices.

En présence d'amortissement, il faut alors introduire une matrice structurale d'amortissement (ou matrice de dissipation) $[D_{ij}]$, en relation avec les vitesses généralisées de Lagrange $\{\dot{q}_j\}$. En présence de forces extérieures généralisées de

Lagrange, notées $\{Q_j\}$, alors finalement les équations du mouvement écrites sous forme matricielle dans le cas le plus général peuvent se mettre sous la forme :

$$[M_{ij}]\{\ddot{q}_j\} + [D_{ij}]\{\dot{q}_j\} + [K_{ij}]\{q_j\} = \{Q_j\}.$$

Les techniques de diagonalisation de ces nouveaux opérateurs matriciels ne sont pas ici assurées, du fait de la présence de la matrice structurale de dissipation $[D_{ij}]$. Les seuls cas où l'on sache s'en tirer sans difficulté, correspondent au cas de l'amortissement dit « proportionnel » pour lequel on peut finalement écrire : $[D_{ij}] = a[M_{ij}] + b[K_{ij}]$. C'est le seul cas, où le processus de diagonalisation des trois opérateurs se passe correctement. Cela correspond à deux cas limites importants, à savoir l'amortissement de type « inertiel » (ou gyroscopique) pour lequel $b = 0$ (dans ce cas, la matrice structurale dissipative possède la même symétrie que la matrice structurale d'inertie), et le cas de l'amortissement de type « raideur » (ou potentiel) pour lequel $a = 0$ (dans ce cas, la matrice structurale dissipative possède la même symétrie que la matrice structurale de raideur).

III. Introduction sur les vibrations dans les systèmes continus

Les éléments essentiels contenus dans la section précédente s'appliquent aussi aux vibrations des systèmes continus, d'autant que les procédures de diagonalisation, d'orthogonalité et de normalisation des modes propres peuvent être étendues à ces cas là aussi. Toute l'armada des techniques de l'algèbre linéaire et de l'algèbre de Fourier (décomposition en série de Fourier, et utilisation de l'intégrale de Fourier) sont donc disponibles pour venir aider à résoudre les problèmes en vibrations des systèmes continus.

Plutôt que de venir paraphraser ici le contenu détaillé du chapitre 3 sur les rappels de cours consacrés à cette partie, il peut être intéressant à ce stade d'essayer de mettre en perspective le développement des idées sur le sujet au cours des deux derniers siècles, disons pour la période historique allant environ de 1750 à 1950. Nous pourrions d'ailleurs repartir d'un siècle plus tôt avec le travail pionnier de Isaac Newton (1642-1727) en mécanique, tels que décrits dans son célèbre ouvrage « Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica » publié à Londres en 1687. C'est Newton, pour la première fois qui a établi de manière rigoureuse les lois mathématiques décrivant le mouvement des objets matériels, établissant ainsi des bases solides pour la mécanique, incluant les bases de la mécanique céleste et la théorie de la gravitation. Certes des subtilités sur le mouvement des objets en rotation, le théorème du moment cinétique par exemple, d'autres éléments sur les liaisons mécaniques, et toute la théorie moderne de l'élasticité étaient absentes de l'ouvrage de Newton. Il fallut attendre le siècle suivant par exemple pour pouvoir établir à peu près complètement les éléments sur les vibrations transversales des cordes, avec les très nombreux travaux de Leonhard Euler (1707-

1783) en mathématiques et en mécanique. Un peu plus tard, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), revisita la mécanique newtonienne, en élaborant une théorie entièrement nouvelle basée sur une approche algébrique et variationnelle en utilisant le principe des travaux virtuels, ouvrant ainsi un nouvel axe connu aujourd'hui sous le nom de mécanique analytique, cf. son ouvrage « Mécanique analytique » publié en 1788. Les nouveaux outils, totalement inaccessibles du temps de Newton, permirent justement de mettre en équation les systèmes discrets possédant un grand nombre de degrés de liberté, et d'assurer la transition vers les systèmes continus (en mécanique des fluides ou bien en mécanique des solides). Les outils de base étaient donc en place à la fin du 18^{ème} siècle. Ils furent complétés au début du siècle suivant par Joseph Fourier (1768-1830) qui ouvrit un pan complet de la physique mathématique, en autorisant la décomposition d'une fonction quelconque en séries harmoniques convergentes.

Tout semblait donc être en place au début du 19^{ème} siècle pour pouvoir effectuer des progrès significatifs pour la modélisation des vibrations dans des systèmes continus, au-delà des cordes et des travaux d'Euler sur le sujet (par exemple pour les vibrations transversales des poutres ou des plaques). Pourtant, de sérieux problèmes persistaient justement pour modéliser le comportement mécanique et l'élasticité des poutres et des plaques en déformations de cisaillement, et pour traiter correctement les conditions aux limites associées. Les plus grands mathématiciens et physiciens de la première moitié du 19^{ème} siècle (Lagrange, Bernoulli, Poisson, Sophie Germain par exemple en France) n'arrivèrent pas à traiter complètement et correctement ce problème. Il fallut attendre 50 longues années pour qu'un jeune étudiant en fin de thèse de 26 ans Gustav Kirchhoff, dans un long article publié justement en 1850 dans la revue « Journal für die reine und angewandte mathematik », vol. 40, pages 51-88 (1850) apporte une contribution magistrale sur le sujet vibrations transversales des poutres et des plaques, notamment en introduisant un opérateur spécifique bi-harmonique (lié aux dérivations spatiales d'ordre 4), et en traitant correctement les conditions aux limites pour les extrémités.

D'un point de vue expérimental, le travail de Ernst Chladni avait pourtant étudié les lignes modales (de déplacement nul) pour des plaques métalliques carrées libres saupoudrées de sable, et excitées directement à l'aide d'un archet de violon. Ces travaux rassemblés dans son ouvrage « Die Akustik » publié en 1802, illustre magnifiquement la notion de modes de vibrations et de déformées modales, incluant la visualisation directe des lignes nodales. En 1809, invité aux Tuileries par l'Empereur Napoléon Bonaparte pour y effectuer des expériences de démonstration, Chladni dut bien reconnaître qu'il n'avait pas la moindre idée pour une explication mathématique rigoureuse de l'origine de ces figures. L'Empereur s'empara tout de suite du sujet qui l'avait totalement subjugué. Il demanda par le biais de l'Académie des Sciences de Paris d'ouvrir un concours spécial auprès des plus grands mathématiciens et physiciens français de l'époque pour venir résoudre ce problème. Ce fut donc malgré tout un chercheur allemand qui 40 ans plus tard mit un point final à la question, en la personne du grand physicien Gustav Kirchhoff.

Pour autant, il fallut attendre encore le travail de Ritz pour pouvoir calculer précisément les lignes nodales d'une plaque carrée libre sur ses 4 côtés, avec rigueur.